Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°3:
Limite et Continuité

Exercice 1.
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\quad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1},\quad (c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right),\quad (e)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x},$$

Exercice 2.
Etudier la continuité des fonctions suivantes:

$$f: x\mapsto (x-E(x))^2,\qquad g: x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Exercice 3.
Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.

Exercice 4.
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 5.
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $c\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que

$$f(c)=f\left(c+\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 6.
Soit f continue sur $\mathrm{I}=[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$ contractante de rapport k. On choisit un point quelconque $a_0\in\mathrm{I}$ et on définit la suite (a_n) par

$$a_1=f(a_0);\quad a_{n+1}=f(a_n)$$

(1) Montrer que a_n est de Cauchy et en déduire qu'elle est convergente.
(2) Montrer que la limite ℓ de $(a_n)_n$ est l'unique point fixe de f c-à-d $\ell = f(\ell)$

Exercice 7. (*Extrait d'examen SN* 2017/2018)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1}$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites sur ses bornes.
(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donner son prolongement en 0.
(3) Montrer directement que f est strictement monotone sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$. (sans utiliser la dérivée).
(4) En déduire que f est bijective de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.

Exercice 8.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.

Exercice 9.
Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.